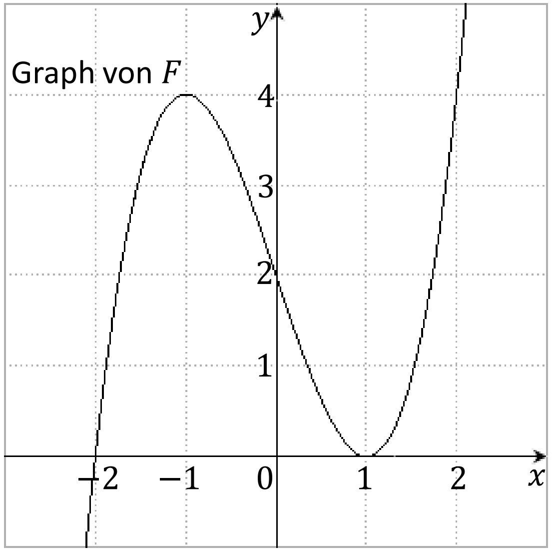
Pflichtteil 2016

Aufgabe 5:



Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f\big(F(-2)\big) > 0$

(5 VP)

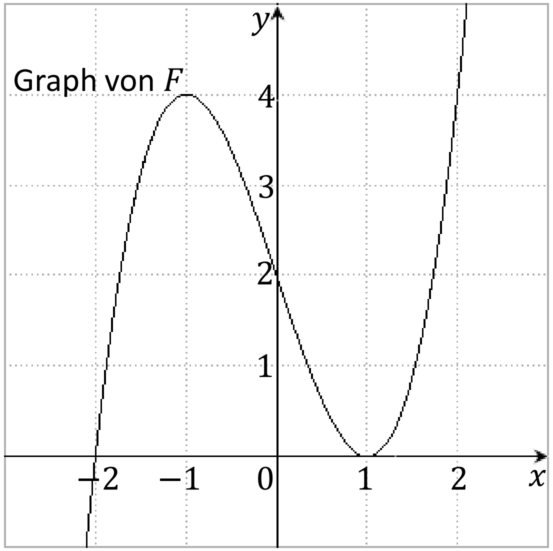
PT 2016 – Lösung Aufgabe 5

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(1) Da F eine Stammfunktion von f ist gilt $F'(x) = f(x)$.
Wir lesen ab $F(1) = 0$ und sehen, dass F an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente hat. Somit gilt $F'(1) = 0$ und wegen $F'(1) = f(1)$ folgt die Behauptung.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.



(2) Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt

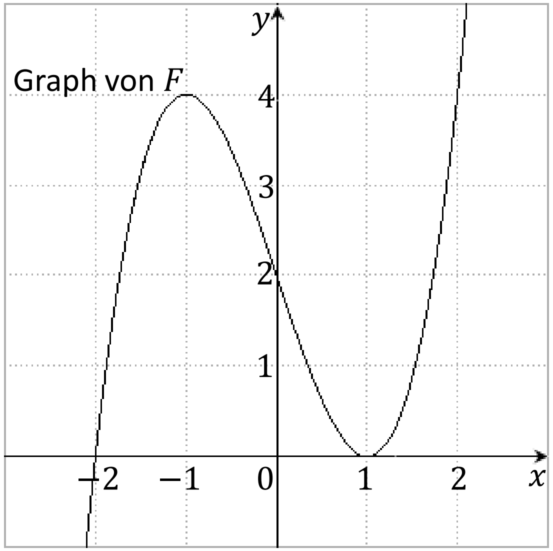
$$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4$$

Ergebnis: Die Aussage ist falsch.

Pflichtteil 2016

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f\big(F(-2)\big) > 0$



(3) Wir sehen, dass F bei $x = 0$ einen Wendepunkt besitzt. Somit gilt $F''(0) = 0$.
Wegen $F'(x) = f(x)$ folgt sofort $F''(0) = f'(0) = 0$, d.h. f' hat bei $x = 0$ eine Nullstelle.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.

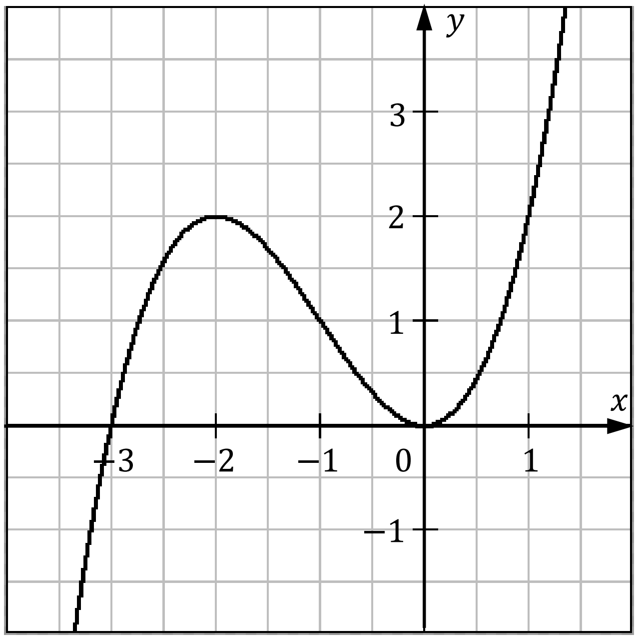
(4) Wegen $f(x) = F'(x)$ können wir statt $f\big(F(-2)\big)$ auch $F'\big(F(-2)\big)$ schreiben.
Aus der Abbildung lesen wir $F(-2) = 0$ ab und müssen nun nur noch $F'(0)$ bilden. Wir sehen aber, dass der Graph von F bei x=0 (im Wendepunkt) eine fallende Tangente hat, d.h. $F'(0) < 0$.

Ergebnis: Die Aussage ist falsch.

Pflichtteil 2015

Aufgabe 5:

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



(1) Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.

(2) $f(-2) < f(-1)$

(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$

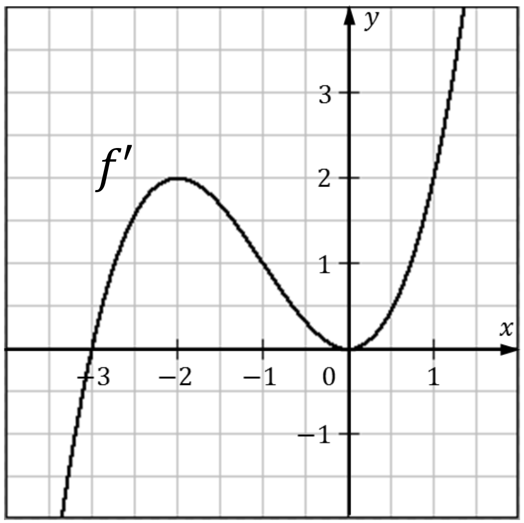
(4) Der Grad der Funktion f ist mindestens 4.

(5 VP)

PT 2015 – Lösung Aufgabe 5

(1) Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.

Für $x < -3$ ist $f'(x) < 0$, für $x > -3$ ist $f'(x) > 0$, während $f(3) = 0$ ist.
Dies bedeutet, dass f in $x = -3$ tatsächlich einen Tiefpunkt hat.



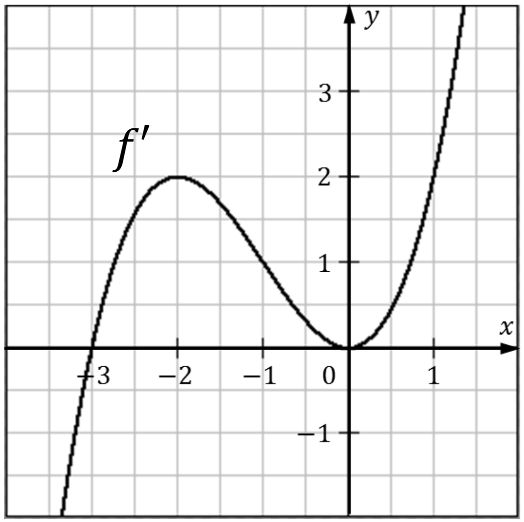
Ergebnis: Die Aussage ist wahr.

(2) $f(-2) < f(-1)$

Für $-2 \leq x \leq -1$ ist $f'(x) > 0$, d.h. die Funktionswerte von f wachsen stetig an. Damit ist wie behauptet $f(-2) < f(-1)$.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.

PT 2015 – Lösung Aufgabe 5



(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$

f‘ hat in $x = -2$ einen Hochpunkt, d.h. $f''(-2) = 0$. Den Funktionswert von f‘ an der Stelle $x = -2$ liest man mit 2 am Schaubild ab. Also ist $f'(-2) = 2$ und damit

folgt $f''(-2) + f'(-2) = 2 > 1$

Ergebnis: Die Aussage $f''(-2) + f'(-2) < 1$ ist falsch.

(4) Der Grad der Funktion f ist mindestens 4.

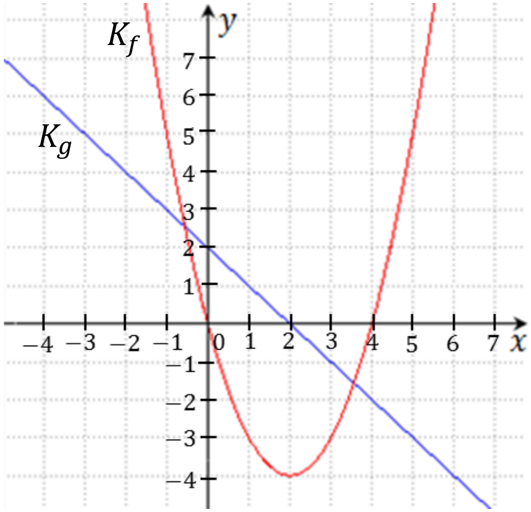
Der Graph von f' hat zwei Extremstellen und ist damit mindestens vom Grad 3. Daher ist f (eine Stammfunktion) mindestens vom Grad 4.

Ergebnis: Die Aussage ist wahr.

Pflichtteil 2014

Aufgabe 5:

Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.

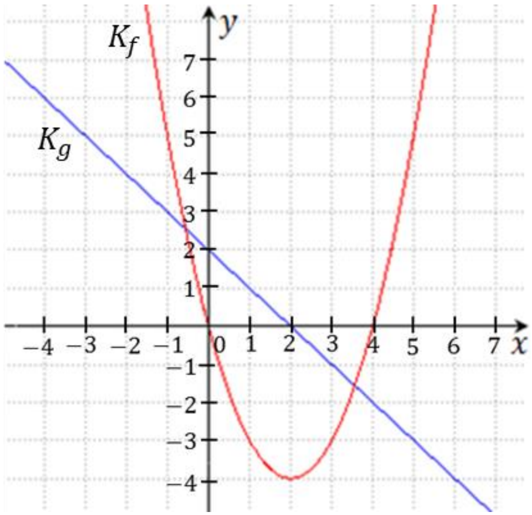


a) Bestimmen Sie $f\big(g(3)\big)$.
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f\big(g(x)\big) = 0$ ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Bestimmen Sie $h'(2)$

(4 VP)

PT 2014 – Lösung Aufgabe 5



Lösung:

a) Wert für $f(g(3))$

Ergebnis: Wegen $g(3) = -1$ und $f(-1) = 5$
ist $f(g(3)) = 5$.

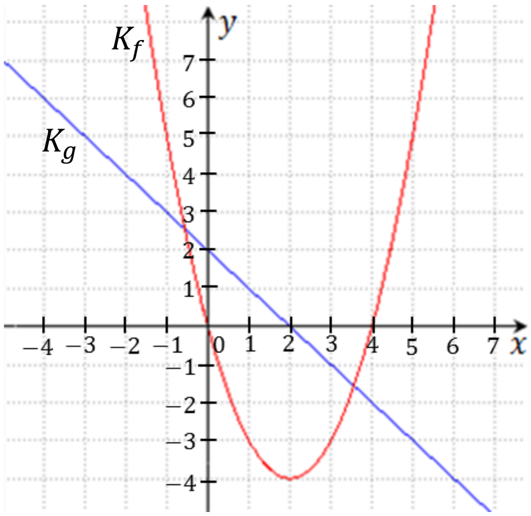
Wert für x, so dass $f(g(x)) = 0$ ist

Für $f(x) = 0$ liest man $x = 0$ und $x = 4$ ab. Wir suchen also Werte für x, so dass $g(x) = 0$ oder $g(x) = 4$ ist. Für $x = 2$ ist $g(x) = 0$ und für $x = -2$ ist $g(x) = 4$.

Ergebnis: Für $x = 2$ und $x = -2$ ist $f(g(x)) = 0$.

PT 2014 – Lösung Aufgabe 5

b) Für $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ bestimme $h'(2)$



Mit der Produktregel gilt

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

und damit

$$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$$

Durch Ablesen erhält man $f(2) = -4$, $g(2) = 0$

Da die Ableitung nichts anderes als die Steigung ist, liest man weiterhin ab:

$f'(2) = 0$, $g'(2) = -1$

Ergebnis: $\underline{h'(2)} = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) = \underline{4}.$

Pflichtteil 2013

Aufgabe 5:

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat.

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

(5 VP)

PT 2013 – Lösung Aufgabe 5

(1) $f(2) = 1$ bedeutet, dass der Graph von f durch den Punkt $(2|1)$ geht.

(2) $f'(2) = 0$ bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle $x = 2$ (also im Punkt $(2|1)$) eine waagrechte Tangente besitzt.

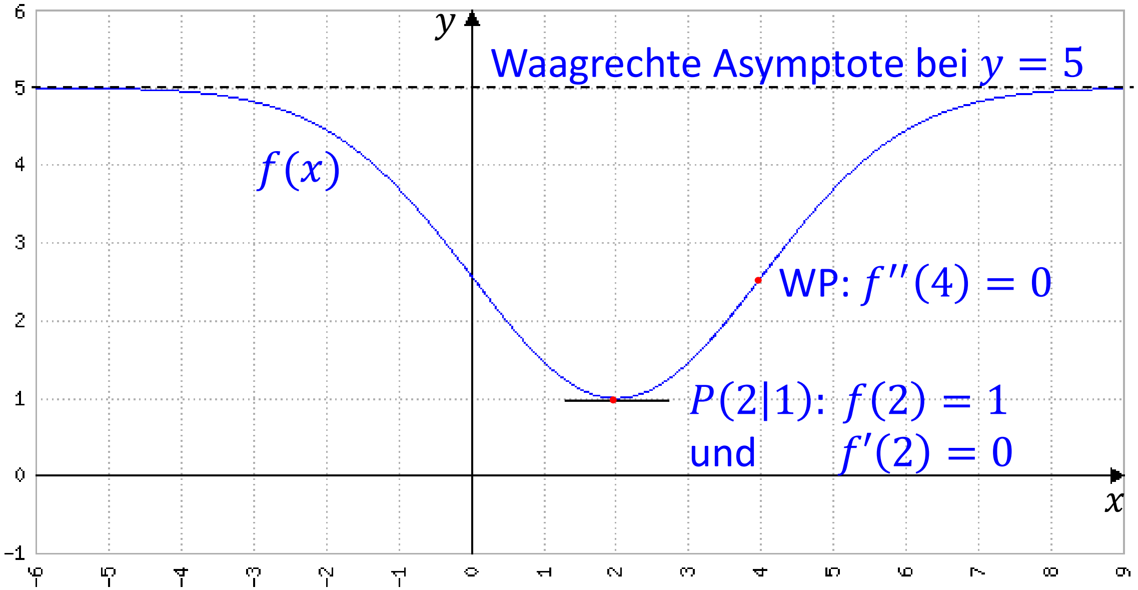
(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$ bedeutet, dass der Graph von f an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt hat.

(4) Für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow 5$

Dies bedeutet, dass die Gerade $y = 5$ eine waagrechte Asymptote des Graphen von f darstellt.

PT 2013 – Lösung Aufgabe 5

Skizzen für den möglichen Kurvenverlauf



Für die Interessierten: Die Funktion $f(x) = -4e^{-\frac{1}{8}(x-2)^2} + 5$ erfüllt alle Bedingungen.

Pflichtteil 2012

Aufgabe 5

Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

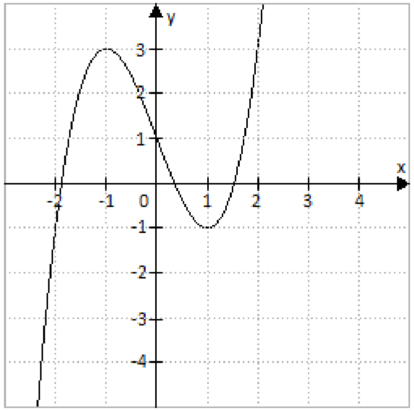


Abb. 1

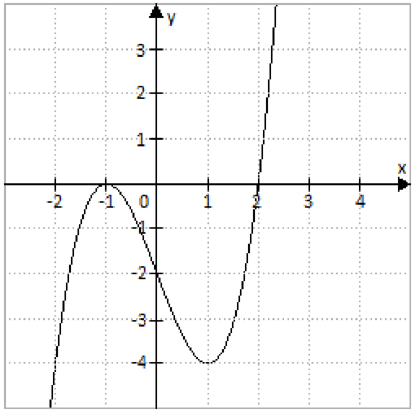


Abb. 2

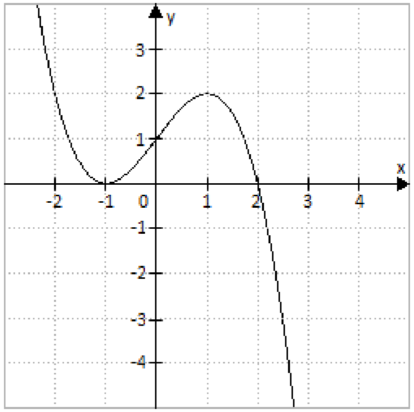


Abb. 3

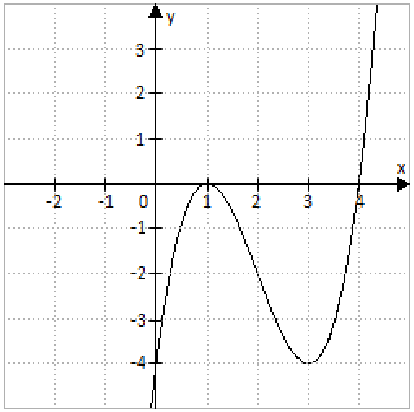


Abb. 4

Pflichtteil 2012 – Aufgabe 5

a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion g mit $g(x) = f(x - a)$ und eine zur Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Geben Sie die Werte für a und b an.

c) Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k.
Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an.

(5 VP)

$f(x) = x^3 - 3x - 2$

Pflichtteil 2012 – Lösung Aufgabe 5

a) $f(x)$ hat Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.
Dies ist bei den Abb. 2 und 3. der Fall.
Es gilt aber $f(0) = -2$, folglich
wird f in Abb. 2 dargestellt.

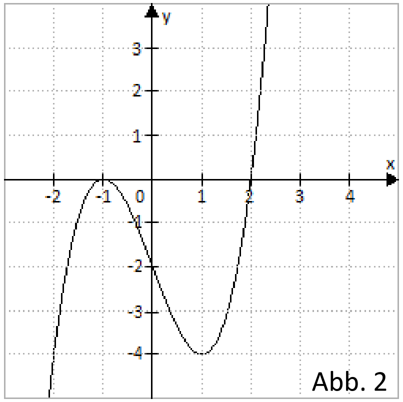


Abb. 2

b) $f(x - a)$ ist eine Verschiebung von $f(x)$ auf der x-Achse um a Einheiten. In Abb. 4 ist $f(x)$ um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Somit stellt Abb. 4 g dar und es gilt $a = 2$ (nicht etwa $a = -2$).

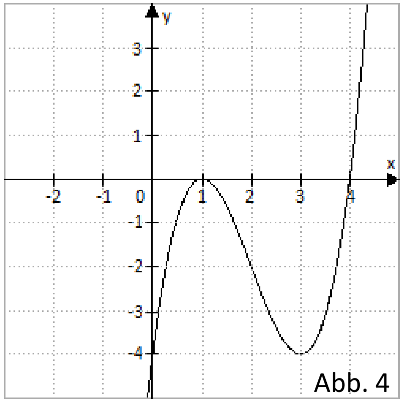


Abb. 4

Pflichtteil 2012 – Lösung Aufgabe 5

b) $b \cdot f(x)$ ist eine Streckung oder Stauchung von $f(x)$ um den Faktor b. Abb. 1 verschiebt $f(x)$ lediglich in y-Richtung, folglich kann $b \cdot f(x)$ nur noch durch Abb. 3 dargestellt werden.
Dabei wird $f(1) = -4$ zu $h(1) = 2$.
Wegen $h(1) = b \cdot f(1)$ also $2 = b \cdot (-4)$
folgt $b = -\frac{1}{2}$.

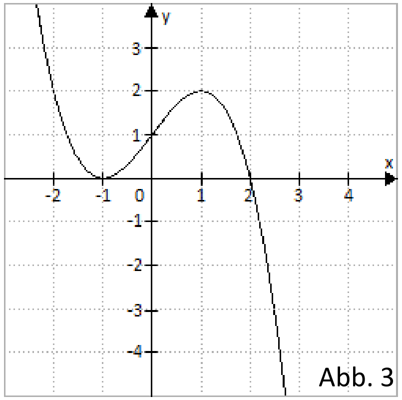


Abb. 3

c) Abb. 1 verschiebt $f(x)$ um 3 Einheiten nach oben, also gilt $k(x) = f(x) + 3 = x^3 - 3x + 1$.

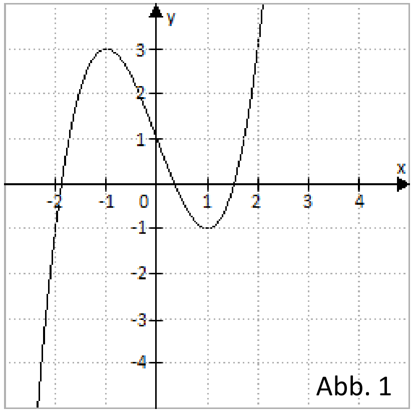


Abb. 1

Pflichtteil 2011

Aufgabe 5:

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.

F ist eine Stammfunktion von f.

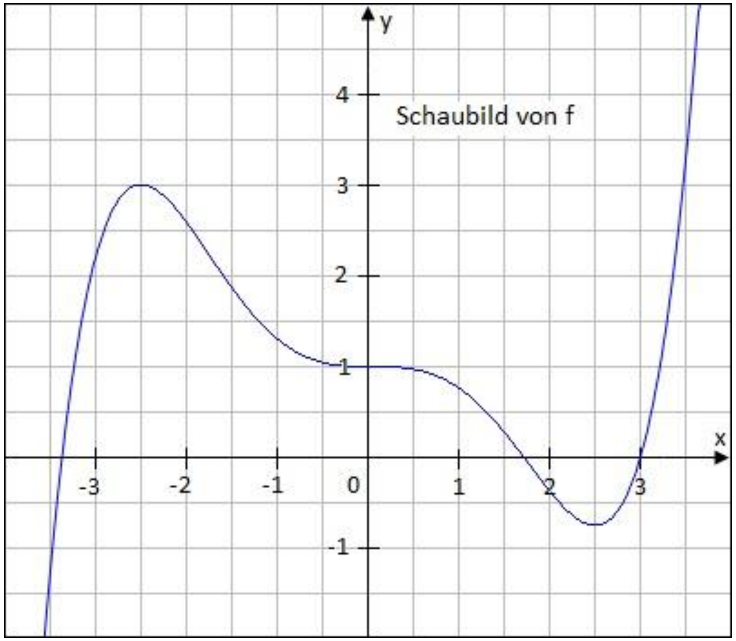
Begründen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind:

(1) F ist im Bereich $-3 \leq x \leq 1$ monoton wachsend.

(2) f' hat im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ drei Nullstellen.

(3) $\int_0^3 f'(x)dx = -1$

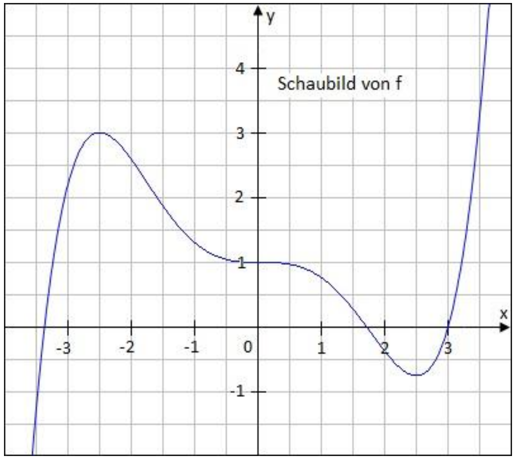
(4) $O(0|0)$ ist Hochpunkt des Schaubilds von f'.



(5 VP)

PT 2011 – Lösung Aufgabe 5

(1) Wegen $f(x) = F'(x)$ gibt f die Steigung von F wieder. In $-3 \leq x \leq 1$ ist $f \geq 0$, also ist F dort monoton wachsend.



(2) Die NST von f' sind die Stellen mit waagrechter Tangente an f. Im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ hat f drei waagrechte Tangenten, also hat f' in diesem Bereich drei Nullstellen.

(3) $\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0) = 0 - 1 = -1.$

(4) f hat links und rechts von $x = 0$ absteigende Tangenten, somit gilt dort $f'(x) < 0$. In $x = 0$ verläuft die Tangente waagrecht, d.h. $f'(x) = 0$. Somit ist wie behauptet der Punkt O(0|0) der(!) Hochpunkt des Schaubildes von f', denn die genannte Situation tritt an keiner weiteren Stelle im Graphen von f auf.

Pflichtteil 2010

Aufgabe 5:

Die vier Abbildungen zeigen Schaubilder von Funktionen einschließlich aller waagrechten Asymptoten.

Eines dieser Schaubilder gehört zur Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{1+x^2} - 1$.

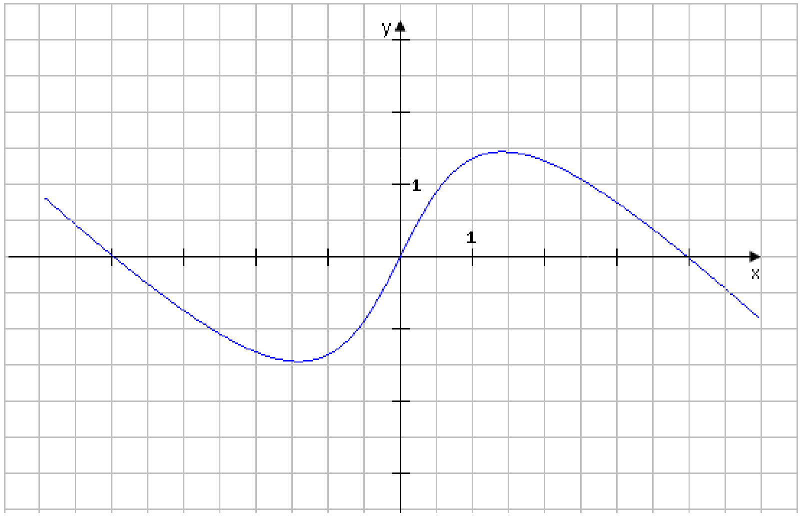


Abb. 1

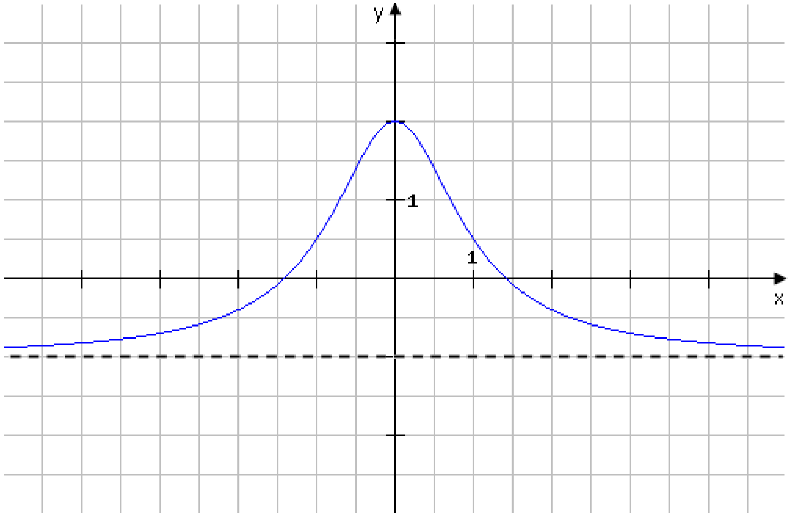


Abb. 2

Pflichtteil 2010

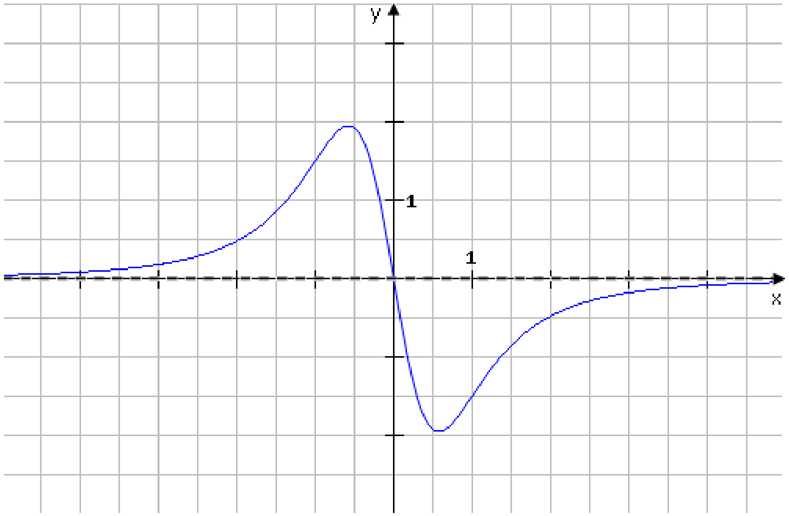


Abb. 3

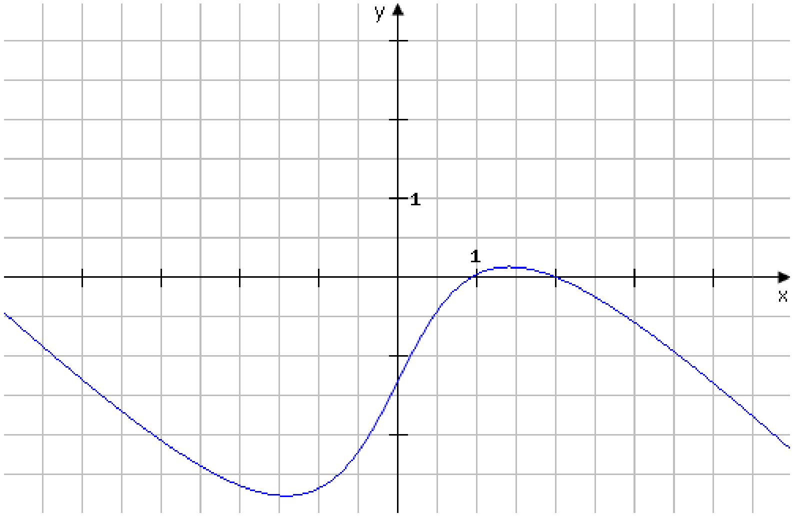


Abb. 4

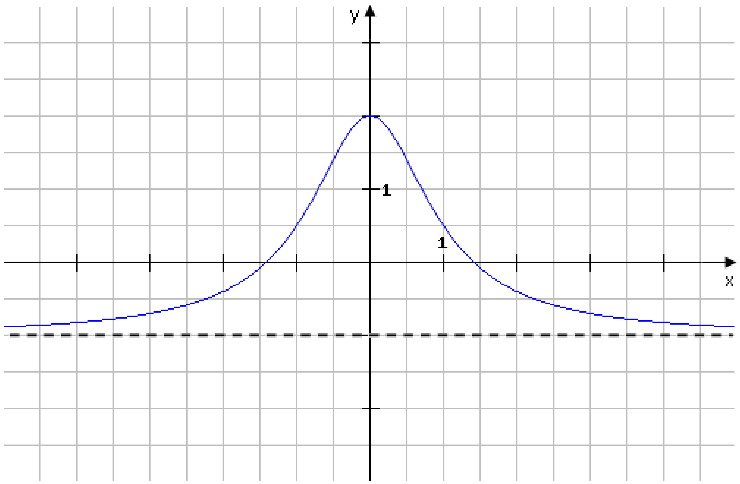
a) Begründen Sie, dass Abbildung 2 zur Funktion f gehört.
Bestimmen Sie den Wert von a.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Ableitungsfunktion f' und eine zur Integralfunktion I mit $I(x) = \int_2^x f(t)dt$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. (5 VP)

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} - 1$$

PT 2010 – Lösung Aufgabe 5

a) Wegen $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$ ist die Gerade $y = -1$ eine waagrechte Asymptote.
Abb. 2 besitzt als einzige Abbildung dort eine waagrechte Asymptote.
Den Wert von a bekommt man, indem man aus dem Schaubild $f(0) = 2$ abliest.
Eingesetzt in f und nach a aufgelöst folgt $2 = a - 1$ also $a = 3$.



Ergebnis: Der gesuchte Wert ist $\underline{a = 3}$.

PT 2010 – Lösung Aufgabe 5

b) Abb. 2 hat bei $x = 0$ einen Hochpunkt, also gilt $f'(0) = 0$, weshalb Abb.4 ausscheidet. Die Steigungen der Tangenten in Abb. 2 sind für $x > 0$ bis zur ersten Nullstelle negativ, d.h. es gilt $f'(x) < 0$ für $0 < x < x_N$. Dies wird nur in Abb. 3 wiedergegeben. Für $I(x)$ bleiben nun noch Abb. 1 und 4. Durch Einsetzen von $x = 2$ erhält man $I(2) = F(2) - F(2) = 0$. Nur die Kurve in Abb. 4 hat bei $x = 2$ den Wert 0.

Ergebnis:
Abb. 3 gehört zum Graphen von $f'(x)$.
Abb. 4 zum Graphen der Integralfunktion.

Schaubild von f'

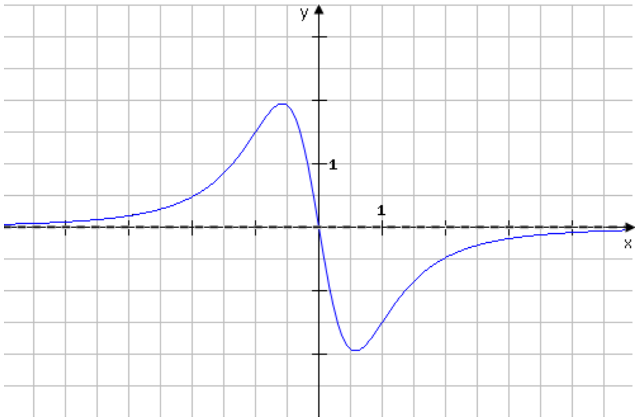


Schaubild von $I(x)$